Visual approximation of continued fraction

日本大学大学院 理工学研究科 博士前期課程 杉本 和希
日本大学 理工学部 利根川 聡・鷲尾 夕紀子・平田 典子
日本大学 生産工学部 川島 誠

TeX による教材作成セミナー
2021 年 3 月 6 日

Contents

本講演では無理数 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の連分数展開を考える．

- 連分数の概要
- Dirichlet の定理・Roth の定理
- Legendre の定理・Vahlen の定理
- 部分商について
- Riemann zeta 関数 $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}$ の連分数展開
- R. Apéry による $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ の連分数展開
- Ford circle by GeoGebra による連分数の表示
- $\zeta(5) \notin \mathbb{Q}$???（未解決）の連分数展開

連分数の概要

連分数を用いて無理数を有理数で近似しよう．

定義 [n 次近似分数]

$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．$a_0 = \lfloor \omega \rfloor \in \mathbb{Z}$, $0 < a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\omega_n}}}}}$$

と表される．この式を ω の連分数展開と言う．連分数展開を a_n で止めて得られる有理数を $\frac{p_n}{q_n} := [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] \in \mathbb{Q}$ ($p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p_n, q_n) = 1$) と書き，n 次近似分数，各 a_k を部分商という．

$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ 及び $p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = (-1)^n$ が成立する．

Dirichlet の定理

Dirichlet の定理

$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．このとき

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

を満たす $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \ (p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \gcd(p, q) = 1)$ は無限個存在する.

つまり，無理数は有理数でよく近似できる．以下 $\overline{\mathbb{Q}}$ を代数的数 (有理数係数一変数多項式の根) 全体のなす体とする．

Roth の定理

$\omega \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$ 即ち代数的無理数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

を満たす $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \ (p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \gcd(p, q) = 1)$ は有限個に限る.

Legendre の定理

連分数展開を途中で止めた近似分数は，ω をよく近似する．

Legendre の定理

$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，$p, q$ を互いに素な整数（$q > 0$），さらに，

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

であるとする．このとき，$\dfrac{p}{q}$ は必ず ω の近似分数になる．

Vahlen の定理

$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}$ を連続した ω の近似分数とすると
２個の近似分数の $\times$ うちの一方は必ず下記を満たす：

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

部分商

$K(\omega) = \sup_{n \geq 1} a_n$ とおく．
$K(\omega) < \infty$ のとき，部分商が有界であるといい
$K(\omega) = \infty$ のとき部分商が非有界という．
例えば，部分商が周期的ならば，有界である．

事実

ω の部分商は周期的 $\Longleftrightarrow$ ω は 2 次無理数 ($\mathbb{Q}$ 係数 2 次方程式の根)

Conjecture

3 次以上の実代数的無理数の部分商 a_n は必ず非有界であろう

（3 次以上の代数的無理数である実数で，部分商が非有界な例はまだ知られていません．一方，部分商が有界な超越数の例は知られています）．

Criterion

無理数の判定条件

次の条件は全て同値．

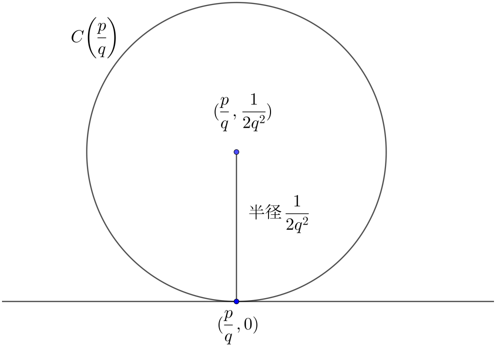
- $\theta \notin \mathbb{Q}$.
- $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ が存在して
$$0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q} \text{ が成立．}$$
- 不等式
$$0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$
を満たす無限個の $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ が存在する．

Ford Circle

定義 [Ford Circle]

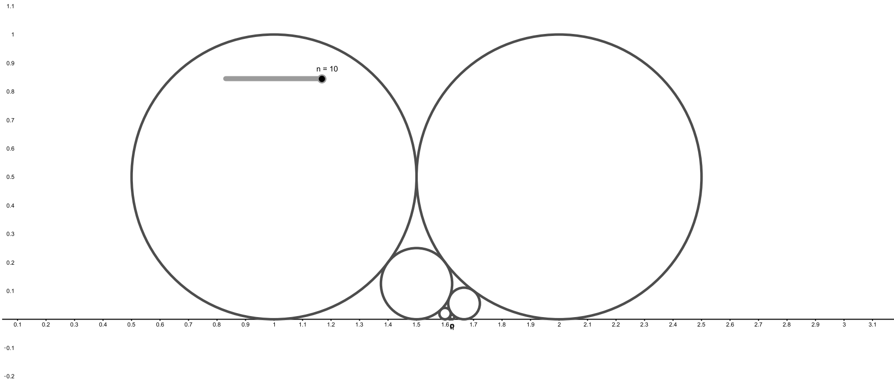
$p \in \mathbb{Z}$ と $0 < q \in \mathbb{Z}$ は互いに素であるとする．
平面において中心 $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$，半径 $\frac{1}{2q^2}$
の円を Ford の円と言い，$C\left(\frac{p}{q}\right)$ で表す．

- 中心の y 座標の値と半径の長さが等しいので，Ford の円と x 軸は接する．



Ford Circle by GeoGebra

- ω の連分数展開の近似分数列に対応する Ford の円を並べる．
- 2 円 $C(\frac{p}{q})$ と $\mathrm{C}(\frac{r}{s})$ が外接 $\iff ps - qr = \pm 1.$
- 近似分数 $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}$ は $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$ を満たすので $n-1$ 次と n 次の近似分数の Ford の円は外接．



$\zeta(2)$ の連分数展開

Riemann zeta 関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を考える $(s > 1)$.

Table: $\zeta(2)$ の近似分数表

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	2	1	2
2	3	2	$\frac{3}{2}$
3	5	3	$\frac{5}{3}$
4	23	14	$\frac{23}{14}$
5	51	31	$\frac{51}{31}$
6	227	138	$\frac{227}{138}$
7	1640	997	$\frac{1640}{997}$
8	1867	1135	$\frac{1867}{1135}$
9	9108	5537	$\frac{9108}{5537}$

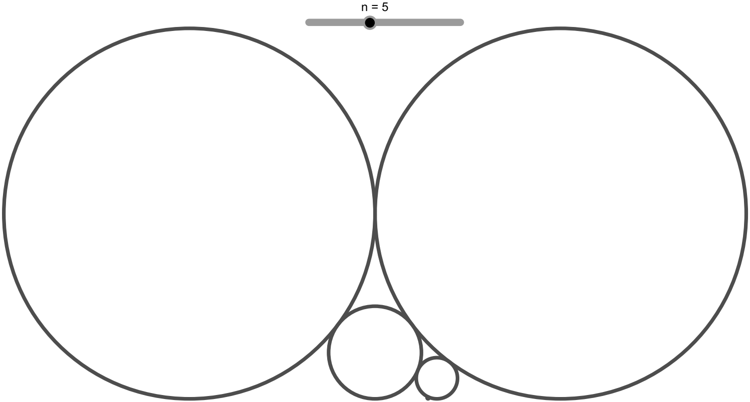
$\zeta(2)$ の Irregular 連分数展開

Irregular 連分数 (分子が 1 とは限らないもの) で展開すると

$$\zeta(2) = \cfrac{5}{3 + \cfrac{1^4}{P(1) + \cfrac{2^4}{\ddots \cfrac{}{P(n) + \cfrac{n^4}{\ddots}}}}}$$

ただし $P(n) = 11n^2 + 11n + 3$.
この多項式は連分数の関数版である Hermite-Padé 近似と呼ばれるものによって求められる.

$\zeta(2)$ の連分数 by Ford Circle



$\zeta(3)$ の連分数展開

Table: $\zeta(3)$ の近似分数表

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	5	4	$\frac{5}{4}$
2	6	5	$\frac{6}{5}$
3	113	94	$\frac{113}{94}$
4	119	99	$\frac{119}{99}$
5	232	193	$\frac{232}{193}$
6	351	292	$\frac{351}{292}$
7	1636	1361	$\frac{1636}{1361}$
8	1987	1653	$\frac{1987}{1653}$
9	19519	16238	$\frac{19519}{16238}$

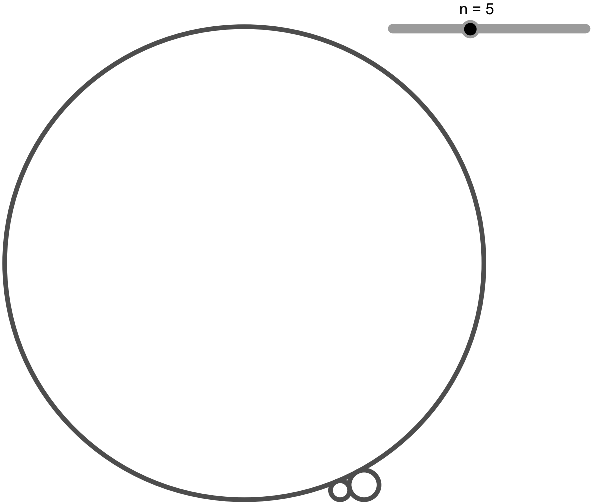
$\zeta(3)$ の Irregular 連分数展開

Irregular 連分数 (分子が 1 とは限らないもの) で展開すると

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 + \cfrac{-1^6}{Q(1) + \cfrac{-2^6}{\ddots \cfrac{}{Q(n) + \cfrac{-n^6}{\ddots}}}}}$$

ただし $Q(n) = (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)$.
この多項式は連分数の関数版である Hermite-Padé 近似と呼ばれるもの
によって求められる.

$\zeta(3)$ の連分数 by Ford Circle

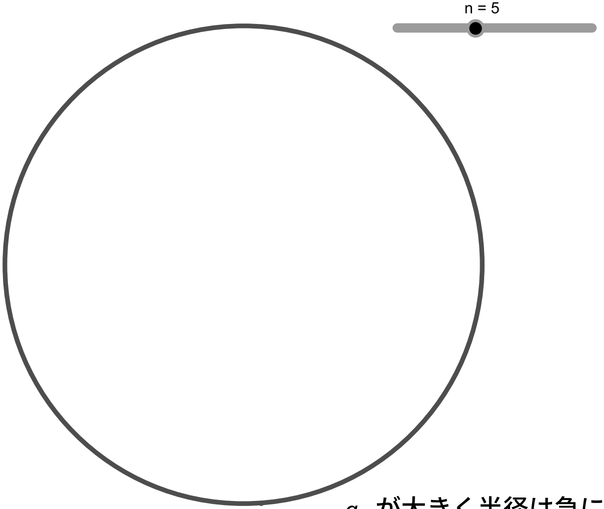


$\zeta(5)$ の連分数展開

Table: $\zeta(5)$ の近似分数表

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	28	27	$\frac{28}{27}$
2	337	325	$\frac{337}{325}$
3	365	352	$\frac{365}{352}$
4	702	677	$\frac{702}{677}$
5	10895	10507	$\frac{10895}{10507}$
6	11597	11184	$\frac{11597}{11184}$
7	68880	66427	$\frac{68880}{66427}$
8	80477	77611	$\frac{80477}{77611}$
9	229834	221649	$\frac{229834}{221649}$

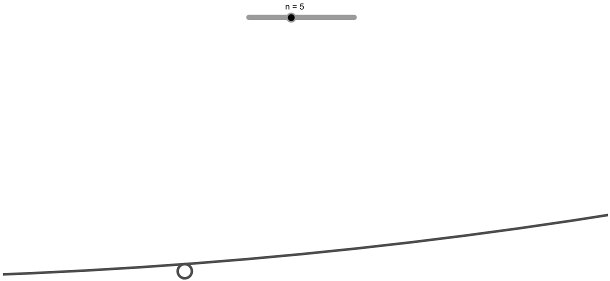
$\zeta(5)$ の連分数 by Ford Circle



q_n が大きく半径は急に小さくなる

（円が見えない）　　↑

$\zeta(5)$ の連分数 by Zoomed Ford Circle



ここに次の円 ↑

ζ 関数の書き換え

- $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ のかわりに，交代級数 $\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \cdot \binom{2n}{n}}$

  を採用すると速く収束し，無理数性の証明に有用 (R. Apéry).

- ちなみに $\zeta(2) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \binom{2n}{n}}$.

- $\zeta(5)$ について，例えば $n \in \mathbb{N}, s \in 2\mathbb{N}+1$ に対し

$$R_n(t) := \frac{2^{6n} n!^{s-5} \prod_{j=0}^{6n}(t - n + \frac{1}{2}j)}{\prod_{j=0}^{n}(t+j)^{s+1}}, \quad r_n = \sum_{t=1}^{\infty} R_n(t)$$

  と定めると，各 n に対し $r_n \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta(s)$

- 事実　$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.
- 予想　$\forall s \in 2\mathbb{N}+1$ に対し，$\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(s)$ はすべて無理数．
- 予想　$\forall s \in 2\mathbb{N}+1$ に対し，$\zeta(s)$ も $\frac{\zeta(s)}{\pi^s}$ もすべて無理数.

GeoGebra files ご紹介